**INTRODUCCIÓN**

En esta práctica se ha desarrollado un sistema para dividir los productos de una cierta empresa en dos lugares distintos (Java). La complejidad está en que hay que reducir el número de productos separados en las dos empresas que han sido comprados alguna vez juntos, ya que esto puede dar lugar a cancelar la compra de los mismos si están divididos. Para resolver el problema, se ha identificado la división de los productos como un problema de grafos, representando cada producto como un vértice, y siendo las aristas la unión de dos productos si se han comprado alguna vez juntos.

Teniendo ya identificado el problema, se han implementados los algoritmos de “Karger” y “Karger-Stein” que encuentran el mínimo corte en un grafo. El corte mínimo consiste en minimizar el número de aristas que conectan dos vértices de los dos cortes disjuntos generados. Para conseguirlos, aparte de implementar los dos algoritmos nombrados, se han utilizado las estructuras de datos más convenientes para reducir al máximo el coste del algoritmo, generando también numerosas pruebas para comprobar su correcto funcionamiento.

**PRODUCTOS**

En primer lugar, antes de generar el grafo del que hay que calcular el coste mínimo, se debía tener una lista de productos. Esta lista se generó de manera iterativa con productos de valores aleatorios para los campos que se creyó que los definían (nombre, precio, unidades, empresa, descuento…). Para acceder a la información del producto, se necesitaba una estructura de datos rápida capaz de dar con coste constante la información a partir del nombre. Dicha estructura no era otra que una tabla hash que identificara cada elemento por una clave única dentro de la tabla.

Producto: nombre, unidades, precio, descuento y marca

Teniendo ya la estructura decidida, el siguiente paso era definir cuál sería la clave de cada producto. Se pensó que el más adecuado sería el nombre, ya que en teoría no debería haber dos productos con el mismo nombre, pero eso dificultaba mucho las cosas al trabajar luego con el grafo y dar nombres a los vértices. Por ello, se decidió utilizar el nombre como clave en la tabla hash, pero utilizando además otra tabla hash auxiliar, independiente a la anterior, que relacionara el nombre del producto con una clave numérica (el identificador de lo que sería posteriormente el vértice).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| NombreProd1 | Producto1 | Clave1 | NombreProd1 |
| NombreProd2 | Producto2 | Clave2 | NombreProd2 |
| NombreProd3 | Producto3 | Clave3 | NombreProd3 |
| … | … | … | … |
| NombreProdN | ProductoN | ClaveN | NombreProdN |

**EMPAREJAR PRODUCTOS**

Con el listado de productos almacenados en la tabla hash, el siguiente paso era generar los emparejamientos entre los productos. Esta información se supone que se daría al algoritmo por parte de “Amazon” para iniciar el corte en dos partes, pero como no se dispone de ella, se generaron emparejamientos aleatorios entre todos los productos. La idea era emparejarlos, reduciendo al máximo el coste, y manteniendo la consistencia de si un cierto producto había sido comprado junto con otro, que en el segundo también estuviera marcado ese emparejamiento.

Para ello, la información se almacenó en una tabla bidimensional, cuyo tamaño en cada dimensión era el número de productos. La posición fijada por la fila “i” y la columna “j” tomaba el valor true si el producto “i” había sido comprado alguna vez con el producto “j”, y false en caso contrario (se aplica el mismo criterio para el valor de fila y columna intercambiados). Para rellenarla, simplemente se recorrió la mitad de la matriz, obteniendo un número aleatorio. Si el número era par, se marcaba a true su celda y a la que correspondía a los valores invertidos de fila columna, si era false, se ponía el valor false.

**GENERACIÓN GRAFO**

Con los datos de los emparejamientos en la tabla booleana, se procedió a generar el grafo. Para representar un grafo, las dos estructuras de datos más comunes eran matriz de adyacencia o lista de adyacencia. La primera de ellas correspondería a la tabla de emparejamientos nombrada anteriormente, valiendo true si un cierto producto (vértice) ha sido comprado con otro (existe arista entre ambos). La segunda es una lista dinámica con punteros a una lista de vértices con los que está conectado uno dado. Dichas estructuras eran muy eficientes para representar el grafo, pero nosotros no decidimos utilizar ninguna de ellas.

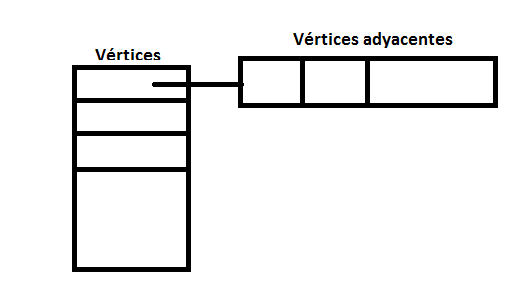
Si analizábamos el algoritmo a implementar, en cada iteración, se eliminaban dos vértices, creando uno nuevo con todas las aristas de los dos por separado. La estructura de matriz de adyacencia, además de tener un coste extra en espacio (se elimina un vértice en cada iteración sin reducir el coste en memoria), se necesitaba recorrerla entera actualizando el valor booleano de cada vértice con la correspondencia de la unión creada. Si mirábamos la lista de adyacencia, se reducía el problema del coste extra en espacio, pero nos encontrábamos ante el mismo problema de recorrer entera toda la estructura para saber si se encontraban los vértices modificados, y actualizar su información con la del nuevo vértice.

Viendo los problemas que generaban las estructuras de datos más comunes, se decidió crear una alternativa que reducía el coste de las operaciones comentadas anteriormente. Esta alternativa estaba compuesta por una tabla hash con todos los vértices que contenía el grafo. Para representar las aristas, se añadió una nueva tabla hash en cada posición de la anterior tabla nombrada. Esta segunda tabla contendría los vértices con los que el vértice de la tabla principal está conectado. La clave de cada índice de la tabla vendría dada por un número que representa el vértice, y cuya correspondencia con el producto se ha comentado en el apartado anterior.

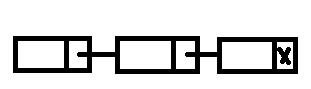
Con esta estructura, añadir un nuevo vértice con la información de los dos unidos tiene coste constante, igual que eliminar los otros dos. Juntar los vértices con los que tienen aristas los dos unidos tendría coste lineal en el número total de aristas de ambos vértices, algo que no mejora en nada sobre las dos estructuras anteriores. Donde está la verdadera mejora de esta estructura de datos es en la operación de actualizar el resto de vértices con la conexión del nuevo. Para realizarlo, la única manera era recorrer la tabla hash principal recorriendo todos los vértices, pero esta vez, no es necesario recorrer el resto de vértices para ver si alguno que era adyacente era alguno de los borrados.

En la matriz y lista de adyacencia, para actualizar la información en todos los vértices del grafo, era necesario recorrer la información del grafo entera; es decir, para cada vértice, mirar si tiene conexión con alguno de los dos borrados, y actualizarla. Para mirar esa conexión, partiendo de un vértice, se debían recorrer todos los demás para ver su conexión con el resto, y realizar el mismo procedimiento para todos. Por todo ello, esta operación tenía coste O(n2), siendo “n” el número de vértices.

Ahora, al estar esta información reflejada en una tabla hash, simplemente accediendo con coste constante a la posición en la que deberían estar los dos vértices borrados (si estuvieran), y modificándolos con la nueva información también con coste constante, se obtiene el grafo actualizado. Sabiendo el coste cuadrático de la operación en las anteriores estructuras, en la nueva que habíamos creado tan sólo tenía coste lineal en el número de vértices, ya que ahora no hace falta recorrerlos todos para ver si hay conexión con los borrados.



A parte de la tabla hash para los vértices adyacentes comentada, el nodo almacenado en la tabla principal tenía que tener también alguna estructura que guardara los vértices (o productos) que se habían unido para generar ese nuevo vértice. Como para este proceso no se necesitaba ningún tipo de eficiencia especial, ya que el coste de todos modos iba a ser lineal en la suma de los vértices unidos, se decidió utilizar una lista dinámica de los identificadores de los vértices ya comentados, haciéndola al menos de este modo eficiente en espacio.



En conclusión, el grafo es una estructura de datos de tipo tabla hash, en la que cada elemento contiene dos estructuras de datos adicionales. La primera de ellas otra tabla hash con los vértices adyacentes para facilitar y reducir el coste de las operaciones de actualización. La segunda una lista dinámica de los identificadores de los vértices que se han unido para generar dicho vértice del grafo. Con todo ello, ya se tiene el grafo final con los productos listo para aplicar el algoritmo de corte mínimo.

**ALGORITMO DE KARGER**

Como ya se ha expuesto en los anteriores apartados un poco para justificar la estructura de datos óptima para el problema, el algoritmo de Karger consiste en ir seleccionando sucesivamente dos vértices del grafo; es decir una arista, y colapsarlos o unirlos en uno sólo, incluyendo en éste las aristas que contenían los dos anteriores. Este proceso se repite un número de veces definido por el número de vértices del grafo hasta que tan sólo quedan dos vértices en total. Así pues, en esos dos vértices se han colapsado los demás que conformaban el grafo y han formado los dos conjuntos del corte realizado.

Este algoritmo no encuentra en todas las ocasiones el corte mínimo para el grafo, pero es una buena aproximación, aunque no acierte. Además, su probabilidad de acierto aumentaría considerablemente utilizando algunas técnicas como podría ser repetir el algoritmo un número alto de veces (aumentaría también el coste en tiempo), pero consiguiendo un acierto con alta probabilidad. La probabilidad de éxito del algoritmo se explica detalladamente y con cálculos matemáticos a continuación.

Todo grafo “G(V,E)” de n=|V| vértices tiene 2n-1 – 1 posibles cortes disjuntos, ya que se omiten dos cortes que harían alguno de los conjuntos finales vacíos (caso que no es posible), y si se intercambiarán los dos conjuntos también se obtendría el mismo resultado por lo que cada corte se está contando dos veces. El problema del corte mínimo es encontrar de entre todos estos posibles cortes disjuntos el mínimo de ellos (mínimo número de aristas entre vértices de los dos conjuntos generados).

Si definimos el peso del corte generado en el grafo matemáticamente se expresaría de la siguiente manera (el peso de todas nuestras aristas es 1):

Ahora, del total de cortes expresado anteriormente, al menos son cortes mínimos del grafo dado. Si denotamos C como las aristas de un coste específico de grado “k”, el algoritmo devuelve C si ninguna de las aristas elegidas aleatoriamente pertenece a C, lo que ocurre con una probabilidad de 1/k/|E|. El mínimo grado de G es al menos “k”, ya que obviamente el grado del grafo inicial es igual o superior al grado del mínimo corte encontrado, así que el número total de aristas es |E| = nk/2.

Dado los datos anteriores, ya se puede definir la probabilidad de que el algoritmo escoja una de las aristas que pertenecen a C, que viene dada por:

La probabilidad de que un cierto grafo con “n” vértices llegue a un corte mínimo C de grado “k” satisface una ecuación en recurrencias que viene dada por cada iteración del algoritmo juntando dos vértices: pn pn-1. Esta probabilidad puede ser expandida a la siguiente expresión:

A modo de información, si se realizase la mejora comentada de repetir varias veces el algoritmo, como podría ser veces, eligiendo de manera aleatoria independiente las aristas, y devolviendo el mínimo corte de todos, la probabilidad de no encontrar el corte mínimo sería:

**ALGORITMO DE KARGER-STEIN**

El algoritmo de Karger-Stein se trata de una mejora del algoritmo de Karger, que permite encontrar con una mayor probabilidad el corte mínimo de un grafo. El algoritmo se basa en que hay un 50% de probabilidad de unir dos nodos en el corte mínimo al contraer “n” nodos hasta tener n/ nodos.

Teniendo en cuenta lo anteriormente explicado, se pueden realizar dos llamadas al algoritmo reduciendo hasta n/ nodos ya que al ser la probabilidad de acierto del 50%, seguramente una de las dos llamadas obtendrá el resultado correcto. Por lo tanto se elegirá el mejor grafo de ambos y se seguirá ejecutando el algoritmo sobre dicho grafo.

Una vez que el número de nodos sea lo suficientemente pequeño se podrá continuar realizando el algoritmo sin necesidad de realizar varias llamadas, ya que la respuesta se podrá encontrar aplicando simplemente fuerza bruta (el algoritmo de contracción que se usaba en la versión de Karger).

**GRAFO CON PESOS**

Para representar un grafo con pesos en este algoritmo, se generaran varias aristas entre dos nodos. Para ello, en lugar de la tabla con valores booleanos que se empleaba anteriormente, se empleara una tablas de enteros que representara cuantas veces se han comprado juntos dos productos. Esta tabla se utilizara para crear el grafo, habiendo entre dos nodos tantas aristas como indica dicha tabla.

Para representar este grafo se seguirá utilizando la misma estructura explicada anteriormente, pero en este caso, hay que introducir un cambio en la tabla has de aristas que contiene cada nodo. Para representar correctamente el que haya varias aristas en dos nodos, se añadirán los caracteres “\_numero” a la clave de cada arista de la tabla hash, siendo “numero” el numero de arista (si hay 3 aristas entre los nodos tendrán las claves “clave\_0”, “clave\_1” y “clave\_2”).

Con esto hecho, el funcionamiento del algoritmo será análogo al anteriormente explicado tanto para el algoritmo de Karger como para el de Karger-Stein. Al unir dos nodos, el nodo resultante recibirá tantas aristas como la suma de las que recibían sus dos mitades, con lo que aumentara la probabilidad de elegir una arista que se dirija a dicho nodo en la próxima iteración. De este modo el algoritmo tendera a unir los nodos entre los que haya muchas aristas pudiendo llegar al final al corte mínimo.

**PRUEBAS**

En las pruebas se puede poner el ejemplo de 10 iteraciones de Wikipedia y el corte mínimo que da. Hay que añadirle la eficiencia en tiempo que lo pide.

**CONCLUSIÓN**

En conclusión, se ha realizado un programa que, a partir de un grafo con pesos o sin pesos, devuelve un corte mínimo con una alta probabilidad. El programa implementa dos algoritmos como son el de “Karger”, y su mejora en “Karger-Stein”. Estos algoritmos, a pesar de que no encuentran en todas las ocasiones el corte mínimo del grafo sí que lo hacen con buena probabilidad.

Además, se han implementado analizando detalladamente los pasos que seguía el algoritmo para construir la estructura de datos que fuera más adecuada y aumentara todo lo posible su eficiencia. Estos algoritmos se han probado con numerosos ejemplos de distinto número de vértices, sabiendo de algunos de ellos el corte mínimo que se obtendría, para comprobar de este modo que funcionaban correctamente.

**REFERENCIAS**

<https://en.wikipedia.org/wiki/Karger's_algorithm>

<http://mathandshit.blogspot.com.es/2012/04/teorema-de-los-monos-infinitos.html>

<http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs161/cs161.1138/lectures/11/Small11.pdf>